UNIVERSITÀ DEGLI STUDI eCAMPUS

Corsi Pas

RISPOSTA DI STRUMENTI ELEMENTARI A INGRESSI CANONICI STRUMENTI DI ORDINE DUE

Lezione 8

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTI DI ORDINE DUE

Sono gli strumenti in cui tutti i coefficienti dell'equazione differenziale lineare a parte quelli di ordine 0, 1 e 2 si annullano e quindi l'equazione si riduce a:

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i$$

Dividendo per a_o: $$\frac{a_2}{a_0}\frac{d^2 q_o}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0}\frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

Si impongono le costanti:

$$K = \frac{b_0}{a_0} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} \qquad \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

Costante di sensibilità statica	Frequenza naturale non smorzata	Rapporto di smorzamento

STRUMENTI DI ORDINE DUE

I coefficienti dell'equazione differenziale diventano:

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{\omega_n^{\ 2}} \qquad \frac{a_1}{a_0} = \frac{2\zeta}{\omega_n} \qquad \frac{b_0}{a_0} = K$$

Sostituendo nell'equazione differenziale scritta in termini dell'operatore D:

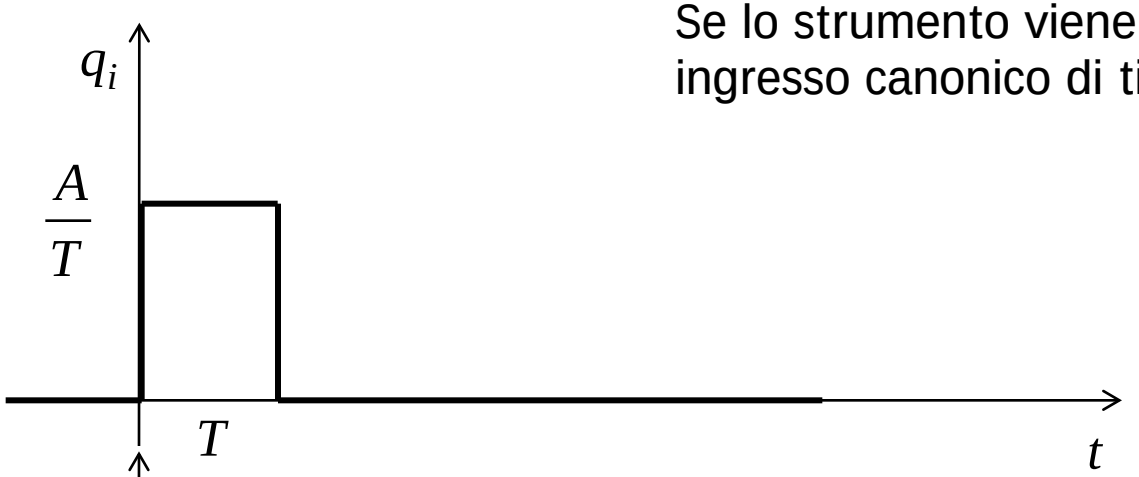
$$\left(\frac{1}{\omega_n^{\ 2}} D + \frac{2\zeta}{\omega_n} D + 1 \right) q_o = K q_i$$

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

RISPOSTA ALL'IMPULSO DELLO STRUMENTO DEL SECONDO ORDINE

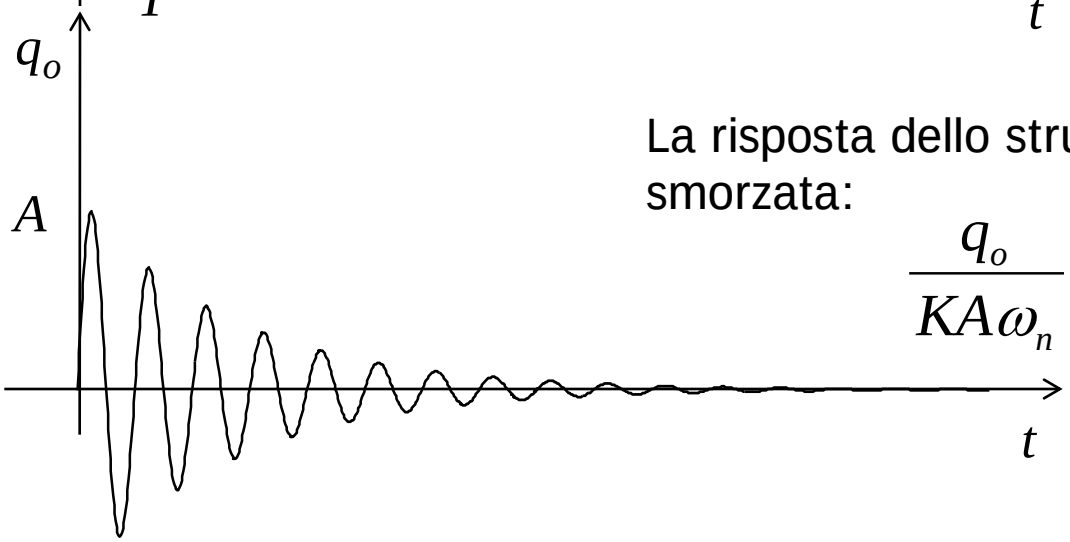
Se lo strumento viene sottoposto ad un ingresso canonico di tipo a impulso:

$$q_i = \lim_{T \to 0} \frac{A}{T}$$



La risposta dello strumento è una funzione sinusoidale smorzata:

$$\frac{q_o}{KA\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)$$



© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 1

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 1

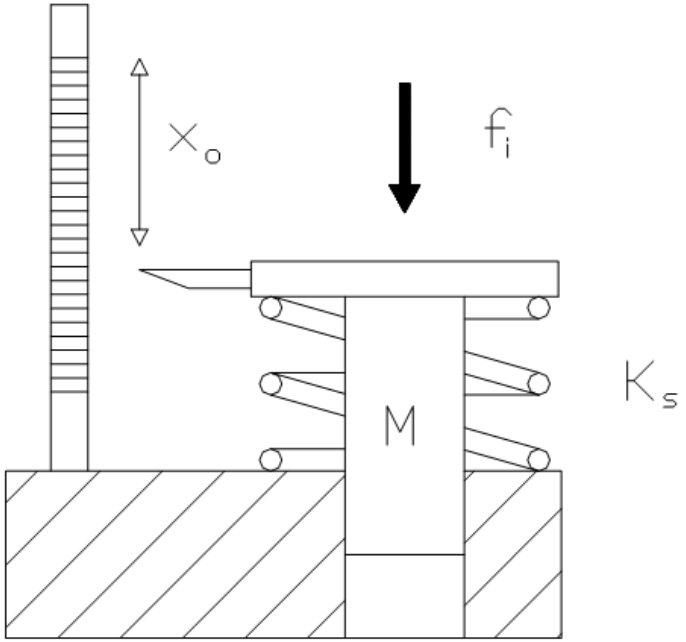
Esempio di strumento di ordine due: la bilancia

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTO DI ORDINE DUE: la bilancia

La bilancia è un trasduttore di forza: il suo ingresso è la forza f_i e l'uscita lo spostamento della lancetta sulla barra graduata x_o.

Le costanti del sistema sono:



M Massa dinamica = Massa mobile del sistema (massa del piattello) + 1/3 della massa della molla, se la frequenza della forza applicata è << della frequenza propria o di risonanza della molla.

K_s Costante elastica della molla (considerata lineare) espressa in [N/m].

B Smorzamento viscoso del pistone (considerando una lubrificazione a film perfetta) espresso in [N/m/s]

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTO DI ORDINE DUE: la bilancia

L'equazione di equilibrio dinamico prevede che la somma delle forze agenti sul sistema sia nulla:

$$f_i - K_s x_o - B\frac{dx_o}{dt} = M\frac{d^2 x_o}{dt^2}$$

Che diventa

$$M\frac{d^2 x_o}{dt^2} + B\frac{dx_o}{dt} + K_s x_o = f_i$$

Dividendo per Ks e sostituendo l'operatore differenziale:

$$\left(\frac{M}{K_s}D + \frac{B}{K_s}D + 1\right)x_o = \frac{1}{K_s}f_i$$

STRUMENTO DI ORDINE DUE: la bilancia

Data l'equazione differenziale:

$$\left(\frac{M}{K_s}D+\frac{B}{K_s}D+1\right)x_o=\frac{1}{K_s}f_i$$

Si definiscono i coefficienti:

$$K=\frac{1}{K_s}[m/N]$$ Costante di sensibilità statica

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K_s}{M}}\ [s^{-1}]$$ Frequenza naturale non smorzata

$$\zeta=\frac{B}{2\sqrt{MK_s}}$$ Rapporto di smorzamento (adimensionale)

Sessione studio 2

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

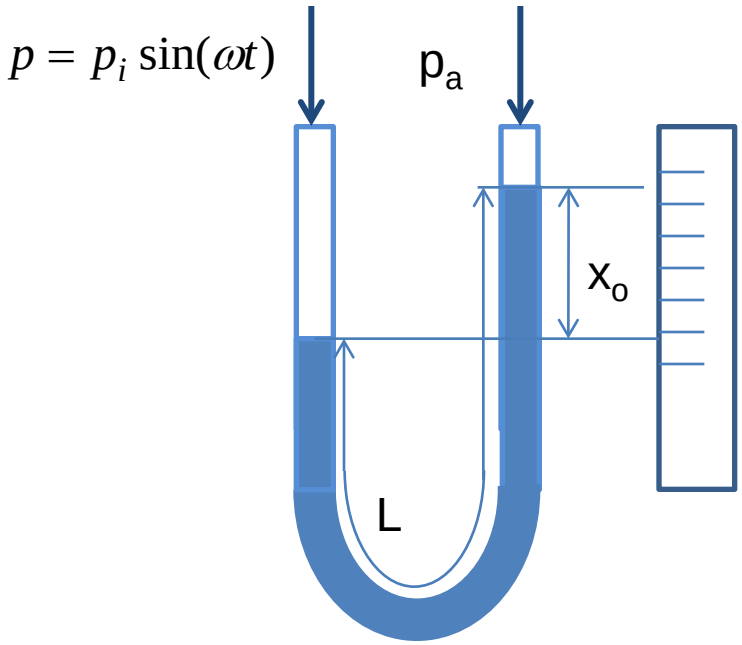
Sessione studio 2

Esempio: manometro a U

STRUMENTO DI ORDINE DUE: il manometro a U

Si consideri un manometro a U per la misura della pressione, che in questo caso è sinusoidale. Si consideri che il moto del fluido manometrico sia laminare, pertanto il profilo di velocità è parabolico.

Sia la velocità del fluido manometrico $v = \dfrac{dx_o}{dt}$ e R il raggio del tubo.



STRUMENTO DI ORDINE DUE: il manometro a U

L'equazione del moto si ottiene dal secondo principio della dinamica, per cui alla forza esterna si oppongono la forza elastica del fluido e la forza d'attrito rappresentata dallo sforzo tangenziale che si genera al contatto tra fluido e pareti del tubo. La forza totale viene bilanciata dalla forza d'inerzia del fluido.

$$M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2x_o}{dt^2} = -2\pi R^2\rho g x_o - 2\pi RL\tau_o + \pi R^2\left(p_i \sin\omega t - p_a\right)$$

forza d'inerzia

forza elastica con costante elastica del fluido

$$2\pi R^2\rho g$$

forza d'attrito con

$$\tau_0 = \frac{4\mu v}{R} = \frac{4\mu}{R}\frac{dx_o}{dt}$$

lo sforzo tangenziale per regime laminare e μ la viscosità dinamica del fluido

forza di pressione ovvero pressione per area della sezione su cui la pressione agisce πR^2

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTO DI ORDINE DUE: il manometro a U

Essendo la massa del fluido manometrico, di densità $\rho, M = \pi R^2 L \rho$ e trascurando il termine costante $\pi R^2 p_a$ si ha:

$$\pi R^2 L \rho \frac{d^2 x_o}{dt^2} + 8\pi L \mu \frac{dx_o}{dt} + 2\pi R^2 \rho g x_o = \pi R^2 p_i \sin \omega t$$

Dividendo per il coefficiente di x_o e sostituendo l'operatore differenziale:

$$\left(\frac{L}{2g} D^2 + \frac{4L\mu}{R^2 \rho g} D + 1 \right) x_o = \frac{p_i}{2\rho g} \sin \omega t$$

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTO DI ORDINE DUE: il manometro a U

Le costanti dello strumento sono:

$$K = \frac{1}{2\rho g}\,[ms^2/kg]$$ Costante di sensibilità statica

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}\;[s^{-1}]$$ Frequenza naturale non smorzata

$$\frac{2\mu}{R^2\rho}\sqrt{\frac{2L}{g}}$$ Rapporto di smorzamento (adimensionale)

Per avere una risposta dinamica lineare anche alle alte frequenze la frequenza naturale non smorzata deve essere alta, e quindi il tubo deve essere corto $\omega_n \uparrow se\ L \downarrow$

Inoltre, la costante di sensibilità sarà alta per fluidi di bassa densità $K \uparrow se\ \rho \downarrow$

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 3

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 3

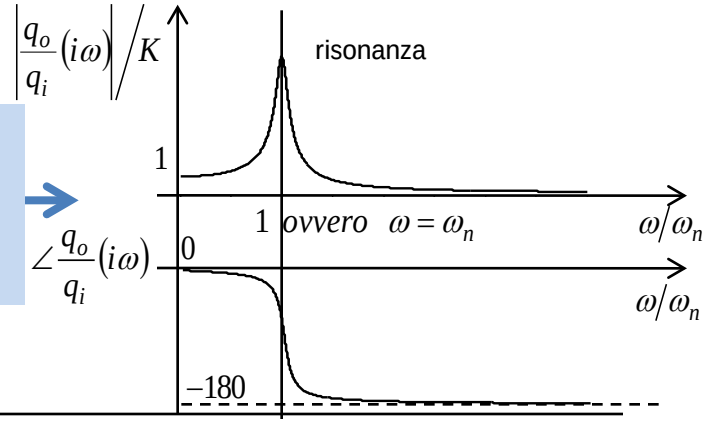
Determinazione sperimentale dei parametri dinamici di uno strumento di ordine due

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

Il procedimento di taratura dinamica consiste nel determinare sperimentalmente la funzione di trasferimento sinusoidale o i parametri dinamici del sistema: ω e ζ per uno strumento del II ordine.
A tale scopo si applica un ingresso noto (sinusoidale, facendone variare la frequenza a intervalli regolari, o di altro tipo) e si registrano contemporaneamente le grandezze di ingresso e di uscita.

Generatore sinusoidale a frequenza variabile → Strumento da tarare → Registrazione ingresso e uscita → Tracciamento FRF in modulo e fase →



DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

Per uno strumento del II ordine si può usare un ingresso a impulso che, se lo strumento è sottosmorzato (ζ<1), produce una risposta del tipo:

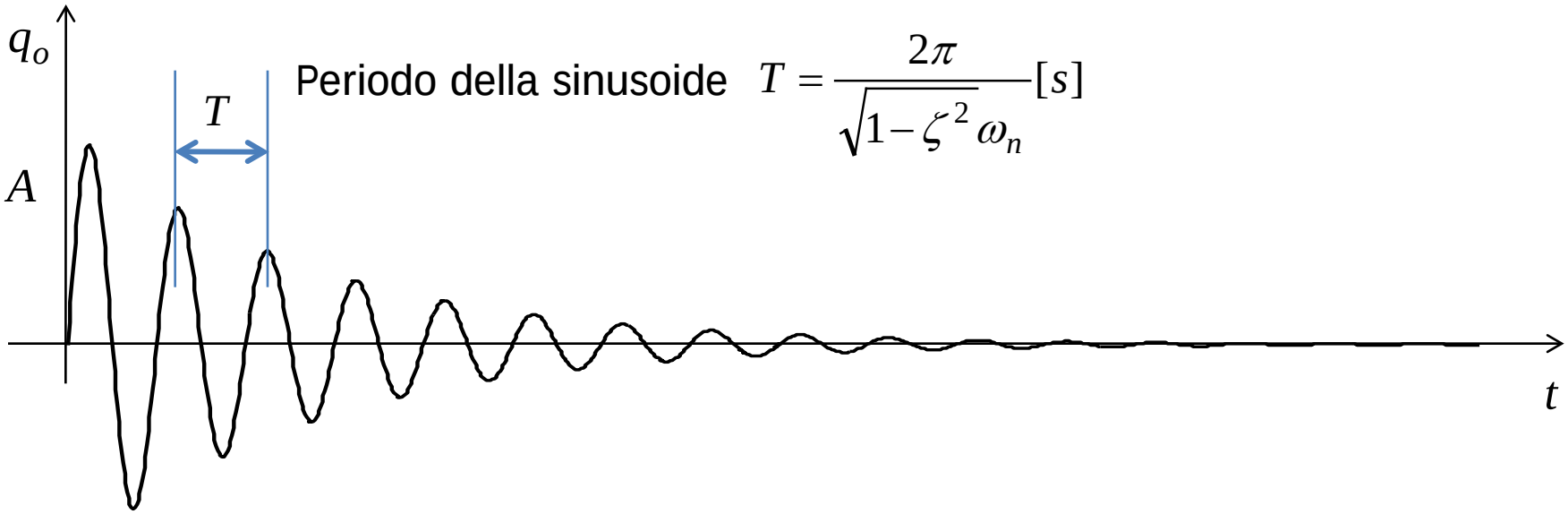
$$\frac{q_o}{KA\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) \qquad per\ \zeta < 1$$

Sinusoide alla frequenza $\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}{2\pi}[Hz]$

smorzata dalla funzione esponenziale $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

La risposta registrata sarà del tipo:



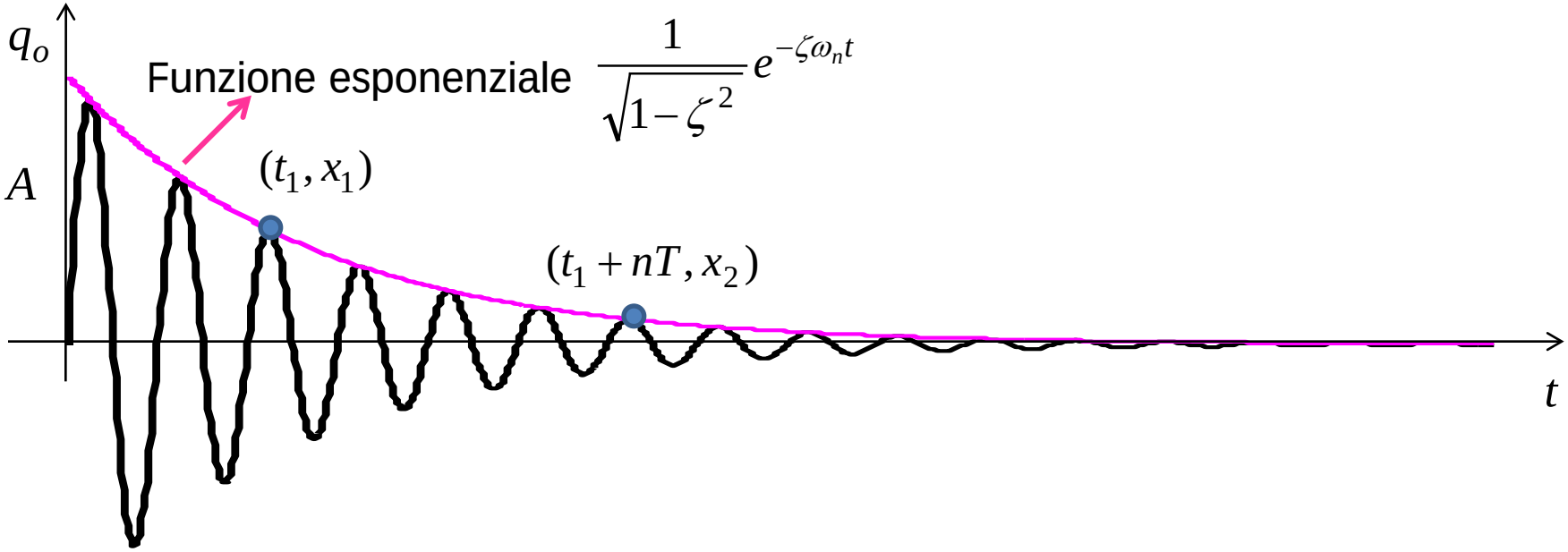
Periodo della sinusoide $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}[s]$

Misurando il periodo dalla risposta registrata si ottiene un'equazione in 2 incognite ζ e ω_n.

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

La risposta registrata sarà del tipo:



Vengono misurate le coordinate della risposta in due massimi e scritte le equazioni esponenziali passanti per quei punti.

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

Ovvero:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_1} & per \quad (t_1, x_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n (t_1+nT)} & per \quad (t_1+nT, x_2) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+nT)}} = e^{\zeta\omega_n nT}$$

Applicando il logaritmo naturale:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta\omega_n nT$$

che insieme alla

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n}$$

formano due equazioni in 2 incognite ζ e ω_n.

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE DUE

Sostituendo T nella prima si ottiene:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\pi n\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Che permette di determinare ζ. Nel caso di strumento poco smorzato ($\zeta << 1$) si può scrivere:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = 2\pi n\zeta$$

Pertanto:

$$\zeta = \frac{\ln(x_1/x_2)}{2\pi n}$$

Noto ζ si può determinare ω_n dalla seconda equazione

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\zeta^2}}$$