UNIVERSITÀ DEGLI STUDI eCAMPUS

Corsi Pas

RISPOSTA DI STRUMENTI ELEMENTARI A INGRESSI CANONICI STRUMENTI DI ORDINE ZERO E UNO

Lezione 7

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTI DI ORDINE ZERO

Sono gli strumenti in cui tutti i coefficienti dell'equazione differenziale lineare a parte quelli di ordine 0 si annullano e quindi l'equazione si riduce a:

$$a_0 q_o = b_0 q_i$$

La loro funzione di trasferimento operazionale si riduce pertanto a:

$$\frac{q_o}{q_i}(t) = \frac{b_0}{a_0} = K$$

Dove K è la costante di sensibilità statica.

L'uscita riproduce l'ingresso a meno di una costante senza distorsioni né ritardi o sfasamenti in genere. Lo strumento di ordine 0 perciò può essere considerato uno strumento con prestazioni dinamiche ideali.

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

STRUMENTI DI ORDINE UNO

Sono gli strumenti in cui tutti i coefficienti dell'equazione differenziale lineare a parte quelli di ordine 0 e 1 si annullano e quindi l'equazione si riduce a

$$a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i$$

$$\frac{a_1}{a_0}\frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

$$K = \frac{b_0}{a_0}$$ Costante di sensibilità statica

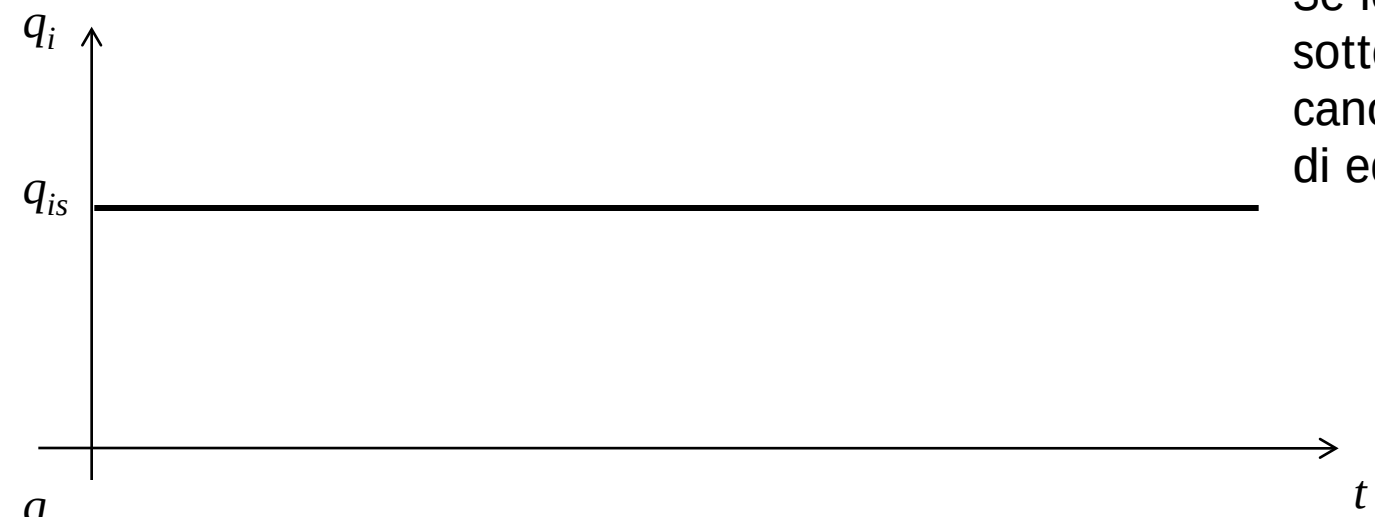
$$\tau = \frac{a_1}{a_0}$$ Costante di tempo

L'equazione diventa $\tau \frac{dq_0}{dt} + q_0 = K q_i$

Per descrivere lo strumento si ha bisogno solo di 2 costanti.

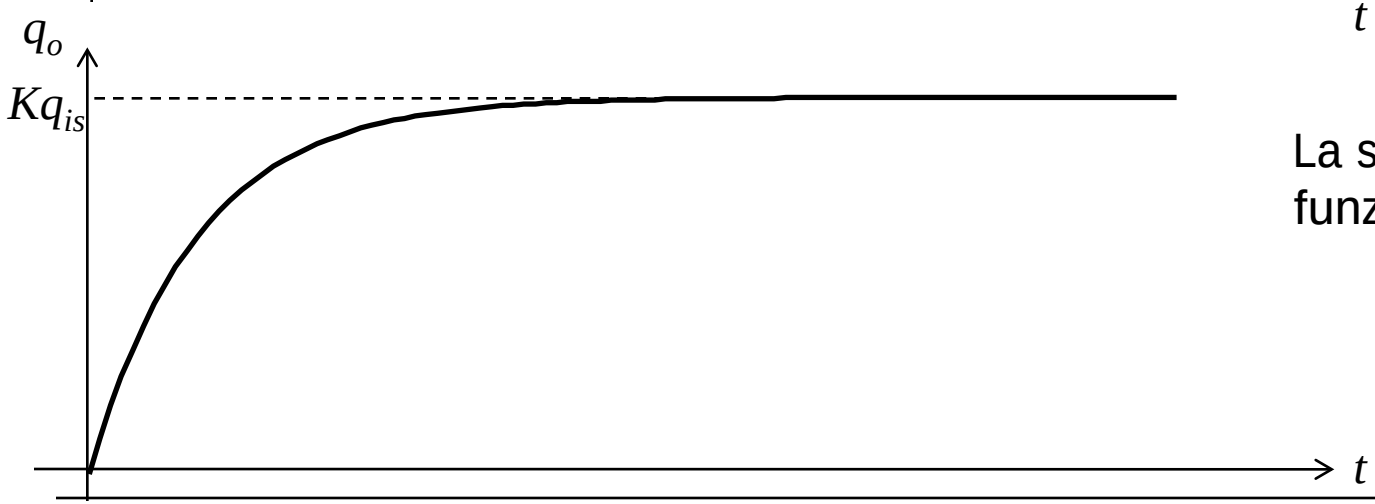
© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

RISPOSTA AL GRADINO DELLO STRUMENTO DEL PRIMO ORDINE



Se lo strumento viene sottoposto ad un ingresso canonico di tipo a gradino di equazione:

$$q_i = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ q_{is} & t \geq 0 \end{cases}$$



La sua risposta sarà una funzione esponenziale:

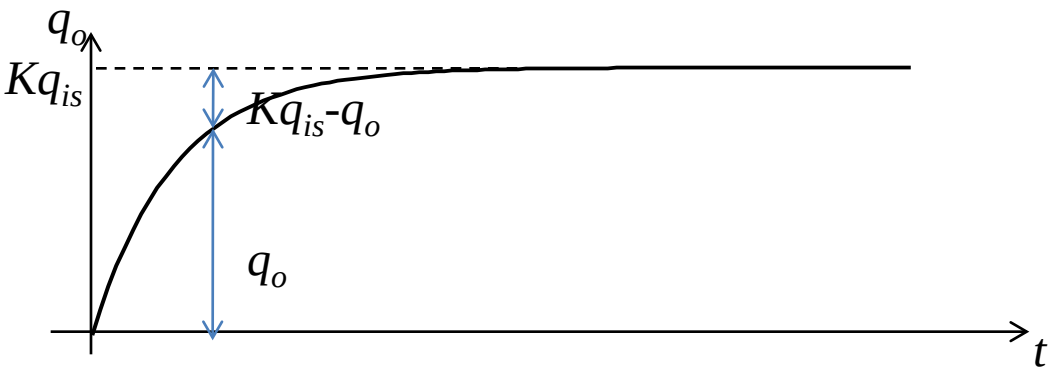
$$q_o = Kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

RISPOSTA AL GRADINO DELLO STRUMENTO DEL PRIMO ORDINE

La differenza percentuale del valore dell'uscita dall'uscita aspettata Kq_{is} vale:

$$\frac{Kq_{is} - q_o}{Kq_{is}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



per $t = \tau$ $\quad \dfrac{Kq_{is} - q_o}{Kq_{is}} = e^{-1} = 0.3678$

quindi $q_o(t = \tau) = Kq_{is}(1 - 0.368) = 0.632\, Kq_{is}$

Pertanto τ è il tempo necessario perché l'uscita raggiunga il 63,2% del valore finale (Kq_{is}).

Sessione studio 1

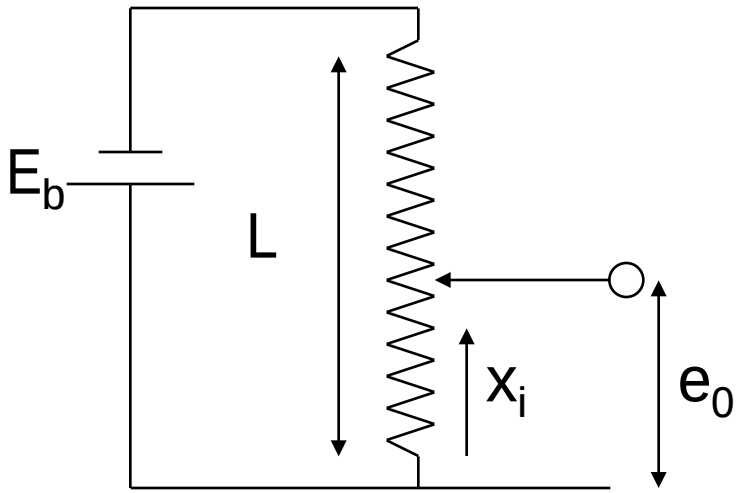
© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 1

Esempio di strumento di ordine zero

STRUMENTO DI ORDINE ZERO: il potenziometro

Il potenziometro, usato come trasduttore di spostamento, è un pratico esempio di strumento di ordine 0.

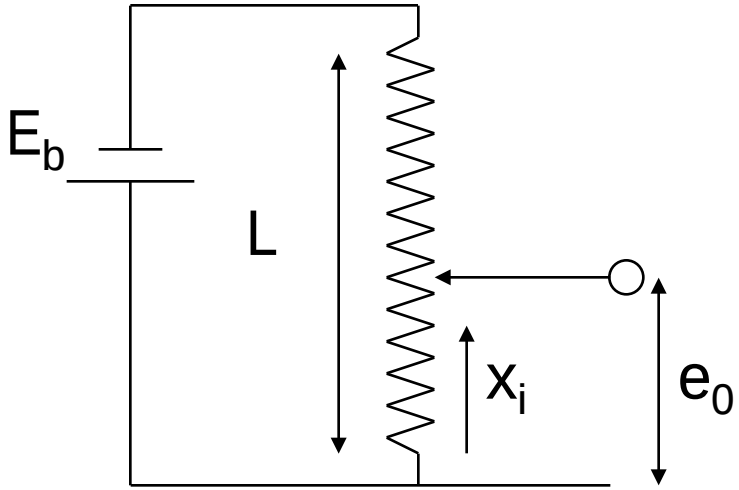


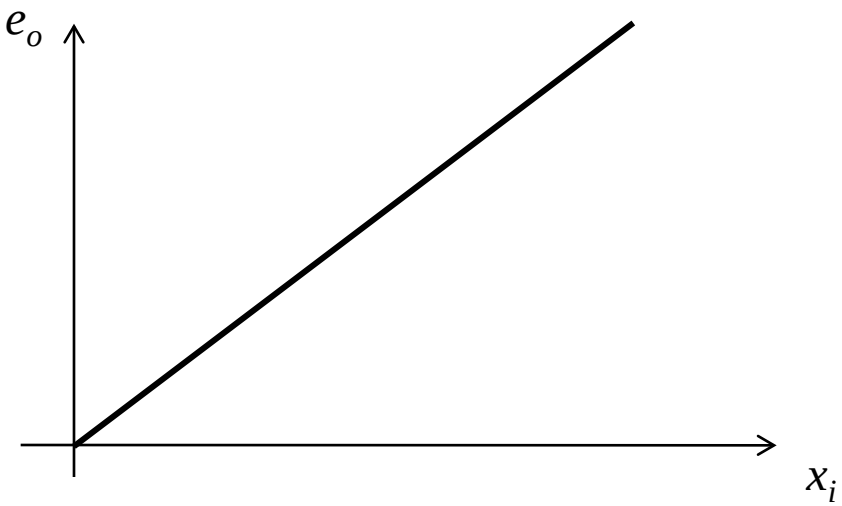
$$e_0 = \frac{x_i}{L} E_b = K x_i$$

$$K = \frac{E_b}{L} \, [V/m]$$ Costante di sensibilità statica

STRUMENTO DI ORDINE ZERO: il potenziometro

Il potenziometro può essere considerato uno strumento di ordine 0 solo se usato per misure a frequenze relativamente basse, altrimenti si dovrebbe considerare la forza d'attrito (tipico fenomeno di ordine uno) e la forza d'inerzia del cursore (tipico fenomeno di ordine due) .





Sessione studio 2

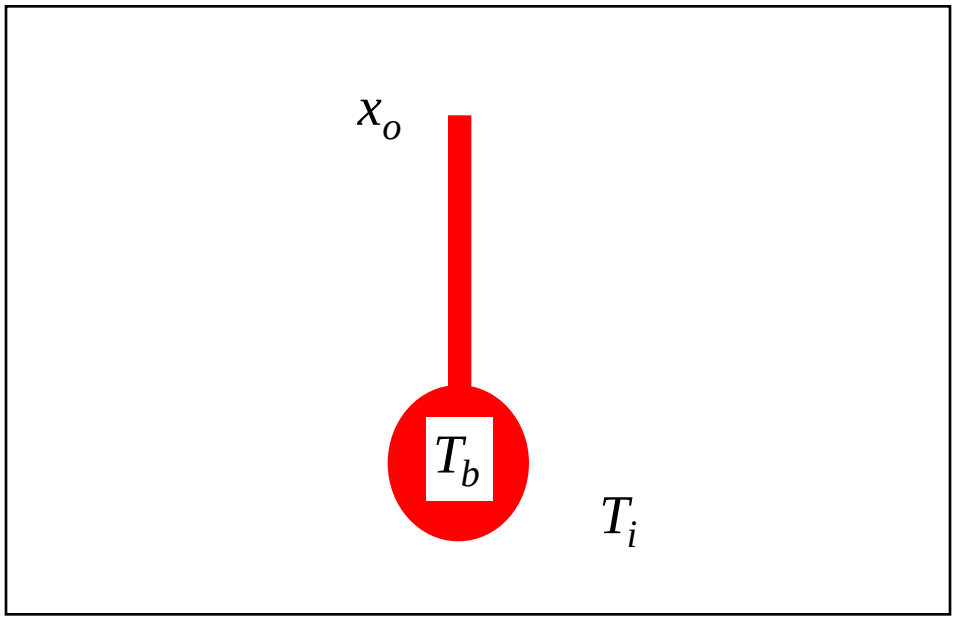
© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

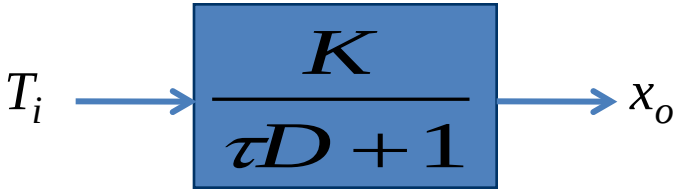
Sessione studio 2

Esempio di strumento di ordine uno

STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

Il termometro è usato come trasduttore di temperatura: la grandezza in ingresso è pertanto la temperatura del fluido T_i e la grandezza in uscita è lo spostamento del fluido nel capillare x_o.





STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

Sotto l'ipotesi di temperatura del fluido uniforme in tutto il fluido per ogni istante di tempo, quando essa varia, varia anche la temperatura del fluido termometrico T_b e così l'altezza del capillare varia a causa dell'espansione termica del fluido termometrico. La grandezza in uscita x_o può essere collegata alla temperatura del fluido termometrico dalla relazione.

$$x_0 = \frac{K_{esp} V_b}{A_c} T_b$$

$$con \quad K_{esp} \; [°C^{-1}] \; coefficiente\, di\, espansione\; termica\, del\; fluido\, termometrico$$

$$A_c \; [m^2] \qquad sezione\, del\, capillare$$

$$V_b \; [m^3] \qquad volume\, del\, bulbo$$

Si trascurano i ritardi meccanici dovuti all'inerzia del fluido

STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

La relazione che lega la temperatura del fluido da misurare, T_i, alla temperatura del fluido termometrico, T_b, si ricava dall'applicazione del principio di conservazione dell'energia in un istante infinitesimo dt di tempo.

$$Q_{in} - Q_{out} = Energia\ immagazzinata$$

$$UA_b(T_i - T_b)dt - 0 = V_b \rho C dT_b$$

Energia che entra nel fluido termometrico per trasmissione di calore (per conduzione e convezione)

Energia che esce è nulla perché non ci sono perdite di calore

$U\ [J/m^2/°C/s]$ *coefficiente di trasmissione termica sulle pareti del bulbo*

$A_b\,[m^2]$ *superficie laterale del bulbo*

$\rho\ [kg/m^3]$ *densità del fluido termometrico*

$C\ [J/kg/°C]$ *calore specifico del fluido termometrico*

STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

Sostituendo T_b dato da:

$$T_b = \frac{x_0 A_c}{K_{esp} V_b}$$

$$UA_b T_i = V_b \rho C \frac{dT_b}{dt} + UA_b T_b = \frac{\rho C A_c}{K_{esp}} \frac{dx_o}{dt} + \frac{UA_b A_c}{K_{esp} V_b} x_o$$

Dividendo tutto per il coefficiente di x_o $\frac{UA_b A_c}{K_{esp} V_b}$

$$\underbrace{\frac{\rho C V_b}{UA_b}}_{\tau} \frac{dx_o}{dt} + x_o = \underbrace{\frac{K_{esp} V_b}{A_b}}_{K} T_i$$

STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

Le costanti caratteristiche dello strumento sono:

La costante di sensibilità statica $$K = \frac{K_{esp} V_b}{A_b} \; [m/°C]$$

E la costante di tempo $$\tau = \frac{\rho C V_b}{U A_b} \; [s]$$

STRUMENTO DI ORDINE UNO: il termometro a bulbo

Per avere una risposta dinamica veloce si dovrà avere:

$$\tau = \frac{\rho C V_b}{U A_b} \downarrow\downarrow$$

E quindi

$\rho \, e \, C$ Sono proprietà del fluido, per cambiarle occorre cambiare fluido

V_b Se il volume del bulbo è piccolo sarà piccola anche la sua sezione A_b pertanto è controproducente, inoltre con esso diminuisce anche la costante di sensibilità statica

U Il coefficiente di trasmissione termica dipende dal fluido termometrico ma anche dal fluido in cui è immerso il termometro, pertanto le caratteristiche dello strumento dipendono anche dal fluido in cui esso è applicato:

In aria $\tau = 100\,s$

In olio $\tau = 5\,s$

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 3

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Sessione studio 3

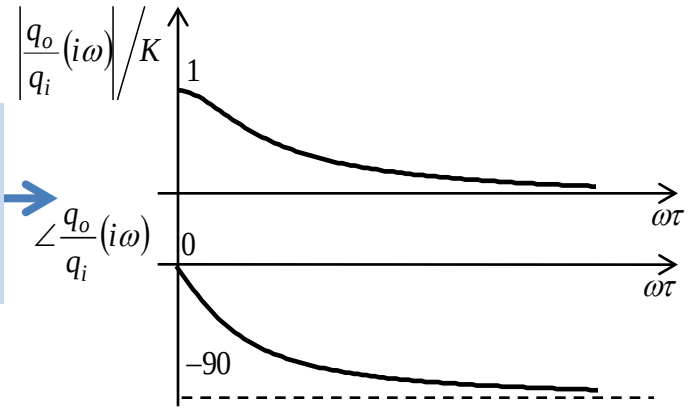
Determinazione sperimentale dei parametri dinamici di uno strumento di ordine uno

© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE UNO

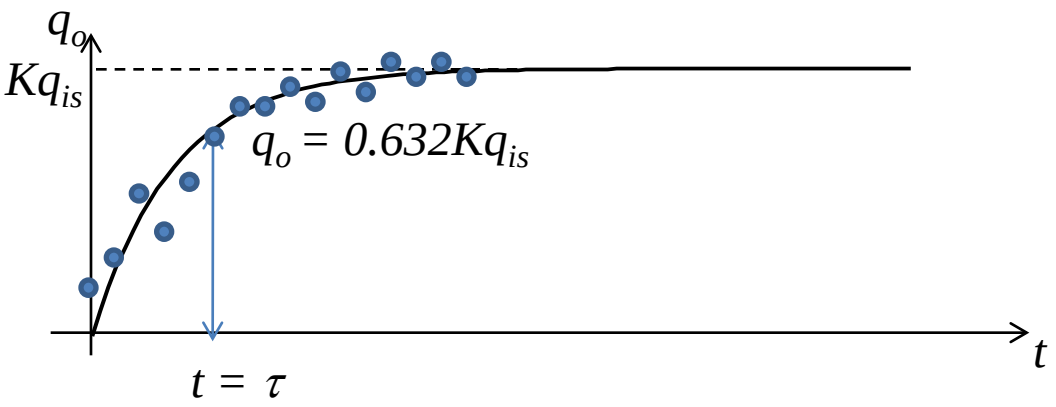
Il procedimento di taratura dinamica consiste nel determinare sperimentalmente la funzione di trasferimento sinusoidale o i parametri dinamici del sistema: τ per uno strumento del I ordine.
A tale scopo si applica un ingresso noto (sinusoidale, facendone variare la frequenza a intervalli regolari, o di altro tipo) e si registrano contemporaneamente le grandezze di ingresso e di uscita.

Generatore sinusoidale a frequenza variabile → Strumento da tarare → Registrazione ingresso e uscita → Tracciamento FRF in modulo e fase →



DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE UNO

Per uno strumento del I ordine si usa un ingresso a gradino che permette di calcolare la costante di tempo come il tempo necessario a raggiungere il 63.2% del valore asintotico.



DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE UNO

Per verificare l'ipotesi del modello del I ordine, a partire dalla registrazione della risposta all'ingresso a gradino, si può tracciare un diagramma logaritmico della risposta:

$$q_o = Kq_{is}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

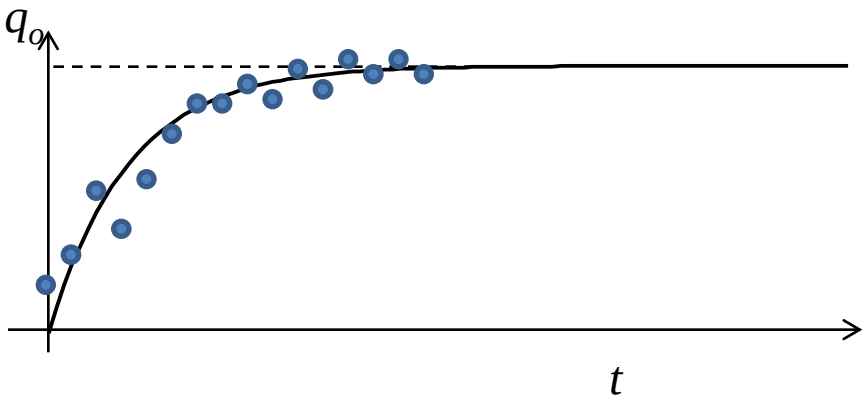
che diventa $\ln\left(1 - \frac{q_o}{Kq_{is}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = -\frac{t}{\tau}$

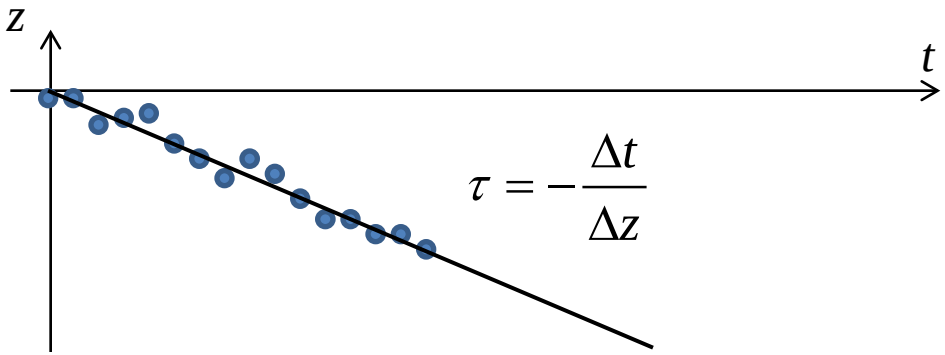
Ponendo $z = \ln\left(1 - \frac{q_o}{Kq_{is}}\right)$ si ha $z = -\frac{t}{\tau}$ cioè si ottiene una retta il

cui coefficiente angolare vale proprio $-1/\tau$.
Se i punti registrati misurando la risposta si dispongono lungo una retta allora il modello di strumento del I ordine è giusto.

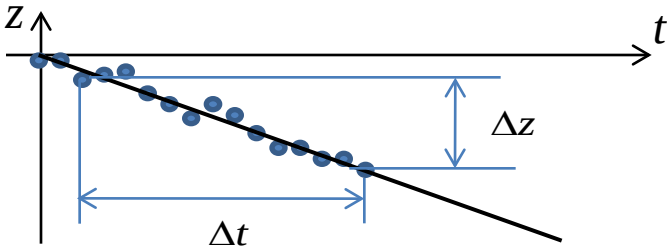
DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEI PARAMETRI DINAMICI DI UNO STRUMENTO DI ORDINE UNO

Il grafico della retta sarà:





Tale diagramma può essere usato per effettuare una misura accurata di τ che può essere determinato come rapporto tra la differenza di ascissa e la differenza di ordinata di due punti qualsiasi della distribuzione.



© 2014 Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 08549051004 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it